Это решение позволяет, исходя из формул (14), определить распределение напряженного состояния. В частности, определить усилия и моменты на концах стержня. Это означает, что построена матрица жесткости для одного элемента в локальной системе координат. Дальнейшая процедура построения матрицы жесткости в глобальной системе координат и для всей конструкции аналогична процедурам в МКЭ, поэтому они здесь не приводятся. Кроме того, считается, что в узлах конструкции заданы силы, которые входят в правую часть системы определяющих уравнений, построенных по МКЭ [2]. Отличительной особенностью получаемой системы от аналогичной системы для статической упругой задачи является то, что правая часть зависит от времени, даже если нагрузка постоянна во времени. Это объясняется тем, что результат воздействия оператора $I + K^{*}$ на постоянную величину есть функция времени. Решение полученной системы основано на МКЭ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю.Н. *Механика деформируемого твердого тела.* – М.: Наука, 1988. – 712 с.

2. Зенкевич О.К. *Метод конечных элементов в технике.* – М.: Мир, 1975. – 541с.

3. Аменздаде Ю.А. *Теория упругости.* – М.: Высшая школа, 1976. – 272 с.

4. Касумов А.К. *Модификация метода конечных элементов для расчета стержневых конструкций.* – Баку: Изд-во «Азербайджан», 1996. – 152 с.

5. Касумов А.К. *Применение метода конечных элементов к расчету стержневых конструкций из композиционных материалов.* – Баку: Изд-во «Азербайджан», 1996. – 76 с.

БИОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, СВЕРТКИ, ОДНОСТОРОННЯЯ ОБРАТИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ И МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В.А. Какичев

theorphy@info.novsu.ac.ru

Доклад является наброском идей, методов и конструкций из ряда еще неопубликованных работ, выполненных автором в последние годы. В нем нет четких формулировок, полученных результатов и, тем более, их обоснования.

I. Свертки, порожденные биортогональными системами функций.

1. Пусть **R** и **Z** - множества действительных и целых чисел; $\mathbf{T} \subset \mathbf{R}$ и $\mathbf{K} \subset \mathbf{Z}$ - их подмножества; $\overline{\Phi}(t) = \{\Phi_k(t)\}$ и $\overline{\varphi}(t) = \{\varphi_k(t)\}$, $\mathbf{k} \subset \mathbf{K}$, $\mathbf{t} \subset \mathbf{T}$ - биортогональные на **T** системы функций [1]:

$$(\varphi_k, \Phi_l) = \int_{\mathbf{T}} \varphi_k(t)\Phi_l(t)dt = \delta_{kl}, \quad \mathbf{k}, l \in \mathbf{K}. \tag{1}$$

2. Пусть $L(\overline{\Phi}, \overline{\varphi})$ - линейное пространство функций, в котором $\overline{\Phi}(t)$ и $\overline{\varphi}(t)$ образуют базисы. Тогда $\forall f(t) \in L(\overline{\Phi}, \overline{\varphi})$ имеют место разложения [1]:

$$f(t) = \left(B_\Phi \overline{f}\right)(t) = \sum_{\mathbf{K}} f_k \Phi_k(t) = \sum_{\mathbf{K}} F_k \varphi_k(t) = \left(B_\varphi \overline{F}\right)(t), \tag{2}$$

где соответственно

$$\overline{f} = B_\Phi^{-1} f(t) = \{f_k = (\varphi_k, f)\}, \quad \overline{F} = B_\varphi^{-1} f(t) = \{F_k = (\Phi_k, f)\}. \tag{3}$$

Из (2) и (3) следуют взаимно обратимые отображения:

$$\overline{f} = C_\varphi \overline{F}, \quad \overline{F} = C_\Phi \overline{f} \tag{4}$$

и

$$\overline{\varphi}(t) = C_\varphi \overline{\Phi}(t), \quad \overline{\Phi}(t) = C_\Phi \overline{\varphi}(t), \tag{5}$$

в которых

$$C_\varphi = \{(\varphi_k, \varphi_l)\} \quad \text{и} \quad C_\Phi = \{(\Phi_k, \Phi_l)\}, \quad k, l \in \mathbf{K} \tag{6}$$

- симметричные матрицы.

3. Рассмотрим ситуацию, двойственную к описанной в п.2. Через $\overline{L}(\overline{\Phi}, \overline{\varphi})$ обозначим линейное пространство векторов $\overline{f}$, таких, что каждому из них сопоставимы функции

$$F(t) = \left(B_\Phi \overline{f}\right)(t) \text{ и } f(t) = \left(B_\varphi \overline{f}\right)(t) \tag{2'}$$

и, значит,

$$f(t) = B_\Phi^{-1} F(t) = B_\varphi^{-1} f(t). \tag{3'}$$

Имеют место взаимно обратимые отображения:

$$f(t) = \left(D_\varphi F\right)(t) = \int_{\mathbf{T}} D_\varphi(t,\tau) F(\tau) d\tau, \quad F(t) = \left(D_\Phi f\right)(t) = \int_{\mathbf{T}} D_\Phi(t,\tau) f(\tau) d\tau \tag{4'}$$

и

$$\overline{\varphi}(t) = \left(D_\varphi \overline{\Phi}\right)(t), \quad \overline{\Phi}(t) = \left(D_\Phi \overline{\varphi}\right)(t), \tag{5'}$$

ядра которых

$$D_\varphi(t,\tau)=\sum_{\mathbf{K}}\varphi_k(t)\varphi_k(\tau) \quad \text{и} \quad D_\Phi(t,\tau)=\sum_{\mathbf{K}}\Phi_k(t)\Phi_k(\tau), \qquad (6')$$

симметричны.

4. Будем предполагать, что $L(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$ и $\overline{L}(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$ являются алгебрами относительно покоординатного умножения, и называть $\overline{L}(\Phi,\overline{\varphi})$ пространством оригиналов, а $L(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$ - пространством изображений. Введем обозначения для ядер билинейных форм, используемых ниже при конструировании сверток:

$$S_{n,kl}^{w,uv}=(w_n,\sigma u_k v_k)=\int_{\mathbf{T}} w_n(t)\sigma(t)u_k(t)v_k(t)dt \qquad (7)$$

и

$$S_{(t,\tau,\theta)}^{w,uv}=\sum_{\mathbf{K}} w_k(t)\sigma_k u_k(\tau)v_k(\theta). \qquad (8)$$

Здесь $\sigma(t)$ и $\overline{\sigma}=\{\sigma_k\}$ – фиксированные (весовые) элементы, о назначении которых будет сказано ниже.

5. По аналогии с (2), (3) положим

$$g(t)=(B_\Phi\,\overline{g})(t)=(B_\varphi\,\overline{G})(t),\quad \overline{g}=B_\Phi^{-1}g(t),\quad \overline{G}=B_\varphi^{-1}g(t).$$

Следуя [2,3], одну из сверток в $\overline{L}(\Phi,\varphi)$ определим равенством

$$\overline{f}\overset{\Phi,\Phi\Phi}{*}\overline{g}=B_\varphi^{-1}\left[\sigma\cdot(B_\Phi\overline{f})\cdot(B_\Phi\overline{g})\right]=B_\varphi^{-1}\left[\sigma(t)f(t)g(t)\right], \qquad (9)$$

которое после ряда формальных преобразований запишем в виде множества билинейных симметрических форм

$$\overline{f}\overset{\Phi,\Phi\Phi}{*}\overline{g}=\left\{\sum_{k,l\in\mathbf{K}}S_{n,kl}^{\Phi,\Phi\Phi}f_k g_l\right\},\quad n\in\mathbf{K}. \qquad (9)$$

Аналогичным образом можно ввести еще три коммутативные свертки

$$\overline{f}\overset{\varphi,\Phi\Phi}{*}\overline{g},\quad \overline{F}\overset{\varphi,\varphi\varphi}{*}\overline{G}=B_\Phi^{-1}\left[\sigma\cdot(B_\varphi\overline{F})\cdot(B_\varphi\overline{G})\right],\quad \overline{F}\overset{\Phi,\varphi\varphi}{*}\overline{G}, \qquad (10)$$

зависимые от (9) и друг от друга в том смысле, что с помощью матриц C_φ и C_Φ между ними можно установить определенную связь. Например,

$$\overline{f}\overset{\varphi,\Phi\Phi}{*}\overline{g}=C_\varphi\left(\overline{f}\overset{\Phi,\Phi\Phi}{*}\overline{g}\right),\quad \overline{F}\overset{\Phi,\varphi\varphi}{*}\overline{G}=C_\Phi\left(\overline{F}\overset{\varphi,\varphi\varphi}{*}\overline{G}\right),$$

а также

$$\overline{f}\overset{\Phi,\Phi\Phi}{*}\overline{g}=\overline{F}\overset{\Phi,\varphi\varphi}{*}\overline{G},\quad \overline{f}\overset{\varphi,\Phi\Phi}{*}\overline{g}=\overline{F}\overset{\varphi,\varphi\varphi}{*}\overline{G}.$$

Кроме этого могут быть определены некоммутативные смешанные свертки

$$\overline{G} \overset{\varphi,\Phi\Phi}{*} \overline{f} = \overline{f} \overset{\varphi,\Phi\Phi}{*} \overline{G}, \quad \overline{f} \overset{\varphi,\Phi\varphi}{*} \overline{G} = C_\varphi\left(\overline{f} \overset{\Phi,\Phi\varphi}{*} \overline{G}\right) = C_\varphi\left(\overline{G} \overset{\Phi,\varphi\Phi}{*} \overline{f}\right). \tag{11}$$

6. Свертку в $L(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$ по аналогии с (9) определим [2,3] так:

$$\left(\overline{f} \overset{\Phi,\Phi\Phi}{*} \overline{g}\right)(t) = \left\{B_\Phi\left[\sigma \cdot \left(B_\varphi^{-1} f\right) \cdot \left(B_\varphi^{-1} g\right)\right]\right\}(t) = \left[B_\Phi\left[\overline{\sigma} \cdot \overline{f} \cdot \overline{g}\right]\right](t) =$$
$$= \sum_{\mathbf{K}} \sigma_k f_k g_k \Phi_k(t) = \iint\limits_{\mathbf{T}\,\mathbf{T}} S_{(t;\tau,\theta)}^{\Phi;\Phi,\Phi} f(\tau) g(\theta) d\tau d\theta \tag{9'}$$

Описание других сверток в пространстве изображений, аналогичных (10) и (11), опускаем. Заметим, что при построении сверток в $\overline{L}(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$ и $L(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$ можно было бы использовать сведения из п.3, а не из п.2.

7. Отметим некоторые проблемы, возникающие при построении сверток в п.5 и п.6:

- обоснование законности перестановки порядка суммирования и интегрирования;
- существование ядер сверток; при этом желательно знать их явное значение;
- описание функциональных, лучше нормированных, пространств $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_2$ и $\mathbf{P}$, таких, что как только свертываемые элементы - из $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ соответственно, то их свертка принадлежит $\mathbf{P}$. Идеальный случай: $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2=\mathbf{P}$ и является банаховой алгеброй со сверточным умножением.

Решение этих задач часто облегчается наличием правильно подобранного веса. Опишем некоторые ситуации [4] на примере свертки (9):

1) $\left(B_\Phi \overline{f}\right) \cdot \left(B_\Phi \overline{g}\right) \notin L(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$,

но $\exists \sigma : \sigma \cdot \left(B_\Phi \overline{f}\right) \cdot \left(B_\Phi \overline{g}\right) \in L(\overline{\Phi},\overline{\varphi}) \quad \forall \overline{f},\overline{g} \in \overline{L}(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$;

2) $\exists \sigma(t) \neq 1$, обеспечивающая не только сходимость интегралов $S_{n,kl}^{\Phi,\Phi\Phi}$, но и принадлежность свертки (9) заданному пространству;

3) $\exists \sigma(t) \neq 1$, такая, что для функций биортогональных систем имеет место некоторая теорема умножения, упрощающая конструкцию свертки [2].

8. Если, например, наряду с алгеброй $L(\overline{\Phi},\overline{\varphi})$ определены еще две алгебры $L(\overline{\Psi},\overline{\psi})$ и $L(\overline{X},\overline{\chi})$, то с их помощью можно построить псевдосвертки, общая конструкция которых описана в [4].

II. Односторонняя обратимость одного класса интегральных операторов

1. Пусть $X, T \subset \mathbf{R}$,

$$\begin{gathered}(Af)(t) = \int_X a(t,x) f(x) dx \in L_2(T) \quad \forall f(x) \in L_2(X) \\ a(t,x) = \sum_{\mathbf{P},\mathbf{Q}} a_{pq} \Psi_p(t) \varphi_q(x) \quad \mathbf{P},\mathbf{Q} \subset \mathbf{Z}\end{gathered} \tag{12}$$

и

$$\begin{gathered}(Bh)(x) = \int_T b(x,t) h(t) dt \in L_2(X) \quad \forall h(t) \in L_2(T) \\ b(x,t) = \sum_{\mathbf{L},\mathbf{M}} b_{lm} \Phi_l(x) \psi_m(t) \quad \mathbf{L},\mathbf{M} \subset \mathbf{Z}\end{gathered} \quad . \tag{13}$$

Условия существования равенств

$$(BAf)(x) = f(x) \text{ и } (ABh)(t) = h(t) \tag{14}$$

имеют вид:

а) $\mathbf{L} = \mathbf{Q},\ \mathbf{M} = \mathbf{P}$;

б) $\int_X \varphi_q(x) \Phi_l(x) dx = \delta_{ql},\ \ q,l \in \mathbf{Q},\ \ \int_T \Psi_p(t) \Psi_m(t) dt = \delta_{pm},\ \ p,m \in \mathbf{P}$;

в) $\sum_{\mathbf{P}} a_{rp} b_{ps} = \delta_{rs},\ \ r,s \in \mathbf{Q},\ \ \sum_{\mathbf{Q}} b_{rq} a_{qs} = \delta_{rs}\ \ r,s \in \mathbf{P}$.

2. Если $h(t) = (Af)(t)$, то в условиях п.1

$$h_r = (h, \psi_r) = (Af, \psi_r) = \sum_{\mathbf{P},\mathbf{Q}} a_{pq} \delta_{rp} f_q = \sum_{\mathbf{Q}} a_{rq} f_q,\quad r \in \mathbf{P}$$

и аналогично $f_s = \sum_{\mathbf{P}} b_{sp} h_p \quad s \in \mathbf{Q}$.

Таким образом, определены матричные отображения

$$\bar{h} = \tilde{A} \bar{f} \in l_2(\mathbf{P}) \text{ и } \bar{f} = \tilde{B} \bar{h} \in l_2(\mathbf{Q}), \tag{12'), (13'}$$

такие, что

$$\bar{h} = \tilde{A} \tilde{B} \bar{h} \text{ и } \bar{f} = \tilde{B} \tilde{A} \bar{f}. \tag{14'}$$

Нетрудно описать зависимые от данных отображений преобразования вида

$$\bar{h} = A_1 \bar{F},\quad \bar{H} = A_2 \bar{f},\ \bar{H} = A_3 \bar{F}$$

и соответствующие им операторы типа (12) и (13).

3. Будем рассматривать равенство $(Af)(t) = \Psi_s(t)$ как уравнение относительно $f = F_s(x)$. Тогда

$$F_s(x) = (B\Psi_s)(x) = \sum_{\mathbf{Q}} b_{qs} \Phi_q(x).$$

Положив

$$f_r(x) = \sum_{\mathbf{P}} a_{rp}\varphi_p(x),$$

убедимся, что

$$(F_s, f_r) = \delta_{rs} \quad r, s \in \mathbf{Q},$$

и, следовательно, системы функций $\bar{F}(x)$ и $\bar{f}(x)$ биортогональны.

III. Односторонняя обратимость матриц

1. Приведенные в начале заметки симметрические матрицы C_φ и C_Φ – один из примеров [1] односторонне обратимых матриц. В [5] описана конструкция построения бесконечно-мерных обратимых матриц с помощью пары ортонормированных систем. Немного позже и независимо от [5] в [6] применен несколько иной способ построения таких матриц, использованный выше при конструировании матриц C_φ и C_Φ. Остановимся на нем подробнее.

2. Пусть $w(x) \in L_2(X)$ и в $L_2(X)$ определены две полные ортогональные системы функций $\bar{\varphi}(x)$ и $\bar{\psi}(x)$ с весами $\alpha(x) \ge 0$ и $\beta(x) \ge 0$:

$$\int_X \alpha(x)\varphi_l(x)\varphi_p(x)dx = a_p\delta_{lp}, \quad a_p > 0 \quad \forall p \in \mathbf{P} \subset \mathbf{Z}$$

и

$$\int_X \beta(x)\psi_m(x)\psi_q(x)dx = b_q\delta_{mq}, \quad b_q > 0 \quad \forall q \in \mathbf{Q} \subset \mathbf{Z}.$$

Следовательно,

$$w(x) = \sum_{\mathbf{P}} u_p\varphi_p(x) = \sum_{\mathbf{Q}} v_q\psi_q(x).$$

Элементы матриц $C_{\beta,\psi\varphi}$ и $C_{\alpha,\varphi\psi}$, реализующих отображения $\bar{v} \to \bar{u}$ и $\bar{u} \to \bar{v}$, имеют вид

$$C_{qp}^{\beta,\psi\varphi} = \frac{1}{b_q}\int_X \beta(x)\psi_q(x)\varphi_p(x)dx \text{ и } C_{pq}^{\alpha,\varphi\psi} = \frac{1}{a_p}\int_X \alpha(x)\varphi_p(x)\psi_q(x)dx.$$

Кроме этого, справедливы равенства

$$\bar{\varphi}(x) = C_{\beta,\varphi\psi}\bar{\psi}(x) \text{ и } \bar{\psi}(x) = C_{\alpha,\psi\varphi}\bar{\varphi}(x),$$

где

$$C_{\beta,\varphi\psi} = C_{\beta,\psi\varphi}^T, \; C_{\alpha,\psi\varphi} = C_{\alpha,\varphi\psi}^T.$$

3. Если в $L_2(X)$ определена еще и третья ортогональная система $\bar{\chi}(x)$ с весом $\gamma(x) \ge 0$ и

$$\int_X \gamma(x)\chi_r(x)\chi_r(x)dx = c_r\delta_{rs}, \quad c_r > 0 \quad \forall r \in \mathbf{R} \subset \mathbf{Z},$$

то имеют место и такие равенства:

$$\overline{\varphi}(x)=C_{\gamma,\varphi\chi}\overline{\chi}(x),\quad \overline{\psi}(x)=C_{\gamma,\psi\chi}\overline{\chi}(x),\qquad \overline{\chi}(x)=C_{\alpha,\chi\varphi}\overline{\varphi}(x)=C_{\beta,\chi\psi}\overline{\psi}(x),$$

из которых вытекают соотношения вида

$$C_{\gamma,\varphi\chi}C_{\beta,\chi\psi}=C_{\beta,\varphi\psi},\quad C_{\gamma,\psi\chi}C_{\alpha,\chi\varphi}=C_{\alpha,\psi\varphi}.$$

4. Приведем только один пример [7], с. 613, N2.22.18.2:

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\rho}(1+x)^{\nu}P_m^{(\rho,\nu)}(x)P_n^{(\rho,\sigma)}(x)dx\quad m,n=0,1,2,...$$

и

$$\int_{-1}^{1}(1-x)^{\rho}\left(1+x^{\sigma}\right)P_n^{(\rho,\sigma)}(x)P_m^{(\rho,\nu)}(x)dx\quad m,n=0,1,2,...,$$

позволяющий построить обратимые матрицы.

5. Аналитические в окрестности точки $z=0$ функции

$$a^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n \text{ и } b^{+}(z)=1/a^{+}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}b_nz^n$$

позволяют построить обратимые треугольные теплицевы матрицы. Большое количество обратимых треугольных матриц приведено в [8].

К конструированию таких матриц могут быть привлечены производящие функции.

6. Сделаем два замечания:

- Рассмотрены не самые общие, а только модельные конструкции. Тем более в стороне остались различные частные случаи.
- Обоснование результатов проводятся стандартными методами функционального анализа [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бари Н.К. Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве// Уч. зап. МГУ. Математика.1951. – Вып.148. – С.69-107.

2. Какичев В.А. О свертках для интегральных преобразований // Изв. АН БССР. Сер. физ.-мат. наук. 1967. – №2 – С.48-57.

3. Какичев В.А. О матричном свертывании степенных рядов // Изв. вузов. Математика. 1990. – №2 . – С.53-62.

4. Какичев В.А. Полисвертки. Определения, примеры, сверточные уравнения. Конспект лекций. – Таганрог: ТРТУ, 1997. – 54 с.

5. Якубович С.Б. О некоторых классах дискретных преобразований, порожденных матричными линейными операторами // Вестник АН Белоруссии. Серия физ-мат. наук. – 1992. – №1 – С.20-25.

6. Какичев В.А. Конструкции сверток, определяемых факторизуемыми операторами (дискретный случай). – Математическое моделирование и его приложение. – Новгород, 1993. – С. 52-59.
7. Прудников А.Г., Брычков Ю.А., Маричев О.И. Интегралы и ряды. Специальные функции. – М.: Наука, 1983. – 750 с.
8. Егорычев Г.П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм. – Новосибирск: Наука, 1977. – 285 с.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МАКСИМИЗАЦИИ ПОДЪЕМНОЙ СИЛЫ КРУГОВОГО КОНТУРА С РАЗМЕЩЕННЫМИ НА НЕМ ИСТОЧНИКАМИ И СТОКАМИ

Марданов Р.Ф.

НИИММ Казанского государственного университета

В плоскости z круговой контур $A_0B_jM_jN_kA_kB_0$ единичного радиуса обтекается потоком идеальной несжимаемой жидкости с заданной скоростью u_∞ набегающего потока (рис.1). В точках M_j, $j=\overline{1,m}$, контура находятся источники интенсивности q_j, а в точках N_k, $k=\overline{1,n}$, – стоки интенсивности q_k. Предполагается, что критические точки, т.е.

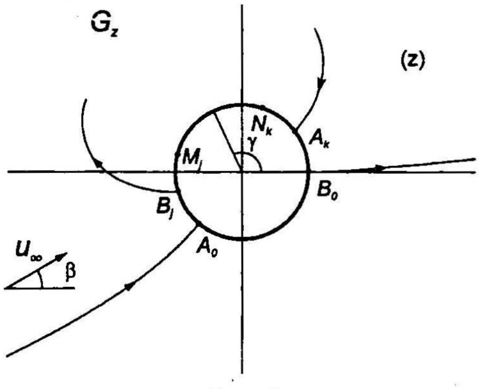

Рис. 1

точки, в которых скорость обращается в нуль, располагаются только на контуре: A_k, $k=\overline{1,n}$, – точки разветвления потока, B_j, $j=\overline{1,m}$, – точки схода потока. Суммарные расходы через все источники Q_m и стоки Q_n заданы (расход берется со знаком "плюс" для источника и со